**Factorization over the complex numbers**

 Factorize the followings up to linear complex number factors of the form $\left[z\pm (a+bi)\right]$, where $a,b$ are real numbers. As an example, $z^{2}+1=\left(z+i\right)\left(z-i\right)$

**1.** $z^{4}-5z^{2}-6$

 $z^{4}-5z^{2}-6=\left(z^{2}-6\right) \left(z^{2}+1\right)=\overline{\overline{\left(z+\sqrt{6}\right)\left(z-\sqrt{6}\right)\left(z+i\right)\left(z-i\right)}}$

**2.** $z^{4}+4$

 $z^{4}+4=\left(z^{4}+4z^{2}+4\right)-4z^{2}=\left(z^{2}+2\right)^{2}-\left(2z\right)^{2}=\left[z^{2}+2z+2\right]\left[z^{2}-2z+2\right]$

 $=\left[\left(z^{2}+2z+1\right)+1\right]\left[\left(z^{2}-2z+1\right)+1\right]=\left[\left(z+1\right)^{2}-i^{2}\right]\left[\left(z-1\right)^{2}-i^{2}\right]$

 $=\overline{\overline{\left[z+\left(1+i\right)\right]\left[z+\left(1-i\right)\right]\left[z-\left(1+i\right)\right]\left[z-\left(1-i\right)\right]}}$

**3.** $z^{3}+z-2$

 $z^{3}+z-2=\left(z-1\right) \left(z^{2}+z+2\right)=\left(z-1\right)\left(z-\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\right)$

 $=\overline{\overline{\left(z-1\right)\left(z-\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)}}$

**4.** $z^{5}+z^{4}+z^{3}+z^{2}+z+1$

**Method 1**

 $z^{5}+z^{4}+z^{3}+z^{2}+z+1=\left(z+1\right)\left(z^{4}+z^{2}+1\right)=\left(z+1\right)\left[\left(z^{4}+2z^{2}+1\right)-z^{2}\right]$

 $=\left(z+1\right)\left[\left(z^{2}+1\right)^{2}-z^{2}\right]=\left(z+1\right)\left(z^{2}-z+1\right)\left(z^{2}+z+1\right)$

 $=\overline{\overline{\left(z+1\right)\left[z-\frac{1+\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{1-\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{-1+\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{-1-\sqrt{3} i}{2}\right]}}$

**Method 2**

 $z^{5}+z^{4}+z^{3}+z^{2}+z+1=z^{3}\left(z^{2}+z+1\right)+\left(z^{2}+z+1\right)=\left(z^{3}+1\right)\left(z^{2}+z+1\right)$

 $=\left(z+1\right)\left(z^{2}-z+1\right)\left(z^{2}+z+1\right)=\overline{\overline{\left(z+1\right)\left[z-\frac{1+\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{1-\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{-1+\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{-1-\sqrt{3} i}{2}\right]}}$

**5.** $z^{4}-z^{3}+2 z^{2}-z+1$

 $z^{4}-z^{3}+2 z^{2}-z+1=\left(z^{4}-z^{3}+ z^{2}\right)+ \left(z^{2}-z+1\right)=z^{2} \left(z^{2}-z+1\right)+ \left(z^{2}-z+1\right)$

 $=\left(z^{2}+1\right)\left(z^{2}-z+1\right)$

 $=\overline{\overline{\left(z+i\right)\left(z-i\right)\left[z-\frac{1+\sqrt{3} i}{2}\right]\left[z-\frac{1-\sqrt{3} i}{2}\right]}}$

**6.** $z^{3}+i$

 $z^{3}+i=z^{3}-i^{3}=\left(z-i\right)\left(z^{2}+iz+i^{2}\right)=\left(z-i\right)\left(z^{2}+iz-1\right)$

 $=\left(z-i\right)\left(z-\frac{-i+\sqrt{i^{2}-4\left(1\right)(-1)}}{2}\right)\left(z-\frac{-i-\sqrt{i^{2}-4\left(1\right)(-1)}}{2}\right)$

 $=\overline{\overline{\left(z-i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(z-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)}}$

**Yue Kwok Choy**

**20/11/2016**